



TITLE:

ITPFIファクターとAT流れ(部分作用素環の構造)

AUTHOR(S):

濱地, 敏弘

CITATION:

濱地, 敏弘. ITPFIファクターとAT流れ(部分作用素環の構造). 数理解析研究所講究録 1991, 751: 178-188

ISSUE DATE:

1991-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/82044>

RIGHT:

ITPFI ファクターと AT 流れ

九大教養 濱地敏弘

ルベーグ空間 (X, μ) に作用する非特異流れ $(F_t)_{t \in \mathbb{R}}$ が次を満たすとき性質 AT を持つという: $\forall \varepsilon > 0, \forall n \geq 1$
 $\forall f_1, \dots, \forall f_n \in L^1(X, \mu)_+, \exists N_i \geq 1, \exists \lambda(i, j) \in \mathbb{R}, (1 \leq j \leq N_i), \exists f \in L^1(X, \mu)_+ \text{ s.t.}$

$$\| f_i(\cdot) - \sum_{j=1}^{N_i} e^{\lambda(i, j)} f(F_{\lambda(i, j)} \cdot) \frac{d\mu_{F_{\lambda(i, j)}}(\cdot)}{d\mu} \| < \varepsilon$$

$i=1, 2, \dots, n.$

III。型 AFD ファクターの中で ITPFI ファクター (Anaki-Woods [1]) は、その flow of weights が性質 AT を持つこと特徴づけられることが Connes - Woods [2] によって示された。AFD ファクターの同型類とエルゴード変換の軌道同型類とは一対一に対応しているから、彼等の結果は次のように言っても同じである。

ルベーグ空間 (Ω, m) に作用する III。型の非特異エルゴード変換が、ある無限直積測度空間 $(\prod_{n=1}^{\infty} \{0, 1, 2, \dots, n_n - 1\}, \prod_{n=1}^{\infty} p_n)$ に作用する加算機変換

$(\omega_1, \omega_2, \dots) \in \prod_{n=1}^{\infty} \{0, 1, \dots, n-1\} \mapsto (\omega_1, \omega_2, \dots) + (1, 0, \dots)$
 と軌道同型であるための必要十分条件は、 T から定まる随伴流
 $(F_t)_{t \in \mathbb{R}}$ が性質 AT を持つことである。ここで P_n は $\{0, 1, \dots, n-1\}$ 上の確率測度であり、上記算法は座標成分毎の和で、
 右に繰り上がる。随伴流 (F_t) とは、歪縮変換

$$\tilde{T}(\omega, u) = (T\omega, u - \log \frac{dmT}{dm}(\omega)), \quad (\omega, u) \in \Omega \times \mathbb{R}$$

の各エルゴード成分から成る $\Omega \times \mathbb{R}$ の分割によって商空間
 $X = \Omega \times \mathbb{R} / \{\tilde{T}\text{-エルゴード成分}\}$ を作り、流れ

$$T_t(\omega, u) = (\omega, u + t), \quad (\omega, u) \in \Omega \times \mathbb{R}$$

を $\Omega \times \mathbb{R}$ から X への射影 π を通して X の上に作用させて
 得られる factor flow のことである。 X の上の測度 (μ) は
 $\Omega \times \mathbb{R}$ の直積測度 $dm(\omega) \times du$ の π による像測度とるゝに
 絶対連続な σ -有限測度である。

Connes - Woods による証明はフォン・ノイマン環のモジュラー
 理論に依拠しているが、本稿で測度論だけを用いた証明を与
 える。難かしいのは、随伴流の AT 条件から T が加算機変換
 (と軌道同型) であることを導くことにあって、逆の方向の
 証明は、Hawkins [4] にある。

$$\text{Orb}_T(\omega) \equiv \{T^n \omega; n \in \mathbb{Z}\}$$

$[T]_* \equiv \{\varphi; \varphi \text{ は定義域 } \text{Dom } \varphi \text{ と像 } \text{Im } \varphi \text{ が } \Omega$
 の可測部分集合である 1 対 1, 非特異

可測写像で, $\varphi \omega \in \text{Orb}_T(\omega) \text{ a.e. } \omega \in \text{Dom } \varphi\}$

$$[T]_*^m \equiv \{\varphi \in [T]_*; m(\text{Dom } \varphi) < \infty, m(\text{Im } \varphi) < \infty\}$$

有限個の $\varphi_{\alpha, \beta} \in [T]_*$, $\alpha, \beta \in \Lambda$, が測度 $Q \sim m$ に
 附いて

(i) $\text{Dom } \varphi_{\beta, \alpha} = \text{Im } \varphi_{\alpha, \gamma} (\equiv \varphi_\alpha)$, (φ_α を γ の γ -という)

$$(ii) \varphi_{\beta, \alpha} \varphi_{\alpha, \gamma} = \varphi_{\beta, \gamma}$$

(iii) $\{\varphi_\alpha; \alpha \in \Lambda\}$ は互いに排反

$$(iv) \beta \text{ 毎に } \frac{dQ_{\varphi_{\beta, \gamma}}}{dQ}(\omega) = \text{定数}, \omega \in \varphi_\gamma$$

を満たす時, $\mathcal{Z} \equiv \{\varphi_{\alpha, \beta}; \alpha, \beta \in \Lambda\}$ を定数 Q -マッ

マッという。 $\bigcup_{\alpha} \varphi_\alpha \in \mathcal{Z}$ の台, $\text{supp } \mathcal{Z}$, と
 いう。

排反の台をもつ有限個の $\mathcal{Z}^i = \{\varphi_{\alpha, \beta}^i; \alpha, \beta \in \Lambda^i\}$
 , $1 \leq i \leq n$, を作り $\{\varphi_{\alpha, \beta}^i; \alpha, \beta \in \Lambda^i, i=1, \dots, n\}$

を多重マッ-と言って $\sum_i \oplus \mathcal{Z}^i$ で表わす。

多重マッ- $\sum_{i=1}^n \oplus \mathcal{Z}^i$ に対してマッ- \mathcal{Z} 。

$$\mathcal{Z} = \{\varphi_{i\alpha, j\beta, \gamma, \delta}; (i\alpha, \gamma), (j\beta, \delta) \in \Lambda\}$$

$$\Lambda = \{(i\alpha, \gamma); 1 \leq i \leq n, \alpha \in \Lambda^i, \gamma \in \Gamma_i\}$$

が

$$e_\alpha = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{r \in T_i} e_{idr}$$

$$e_{idr, i\beta r}(\omega) = e_{\alpha, \beta}(\omega), \quad \omega \in e_{i\beta r}$$

を満たるとき、 ζ は $\sum_{i=1}^n \oplus \zeta^i$ を細分するという。

命題1 非特異エルゴード変換が次を満たせば、加算機変換と軌道同型である: $\forall \varepsilon > 0$, P -ヤコビアンを持つ陽な多重タワ- $\sum_i \oplus \zeta^i$ に対して、ある $Q \sim P$ と定数 Q -ヤコビアンを持つタワ- ζ が存在し

(i) ζ は $\sum_i \oplus \zeta^i$ を細分し

(ii) $\|Q - P\|_{\bigcup_i \text{supp } \zeta^i} < \varepsilon$.

さて

$$d\nu(\omega, u) = dm(\omega) e^u du, \quad (\omega, u) \in \Omega \times \mathbb{R}$$

とおくと ν は \tilde{T} -不変 σ -有限測度になるが、 ν の、 \tilde{T} -エルゴード分解と μ による条件付測度の族 $d\nu(\omega, u|x)$, $x \in X$, 即ち

$$\int_{\Omega \times \mathbb{R}} f(\omega, u) d\nu(\omega, u) = \int_X \mu(x) \int_{\pi(\omega, u)=x} f(\omega, u) d\nu(\omega, u|x) \\ \forall f \in L^1(\Omega \times \mathbb{R}, \nu),$$

は.

$$\begin{cases} \nu(\pi(x)^c | x) = 0 \\ \nu(\cdot | x) \text{ は 非原子的, } \tilde{T}\text{-不変, } \delta\text{-有限なエルゴード} \\ \text{測度} \end{cases}$$

を満たしている。ここで $\pi(x)$, $x \in X$, は \tilde{T} の各エルゴード成分である。

次に、 \mathbb{R} の可算稠密部分群を 1 つ取り固定し、

$$\mathcal{O}_f = \tilde{T} \text{ と } T_r, r \in P, \text{ から生成される群}$$

と可。 \mathcal{O}_f の作用がアメナブルであり、 \mathcal{O}_f の随伴流が T の随伴流 $(= (F_t)_{t \in \mathbb{R}})$ と一致することから Krieger の定理 [6] より T は \mathcal{O}_f と軌道同型である。従って (F_t) が AT 流れである時、 \mathcal{O}_f は加算機変換と軌道同型であることを示せばよいが、実際、命題 1 の条件が成り立つことが以下のようになっている。

$h \in [\mathcal{O}_f]_*^\nu$ に対して $L^1(X, \mu)_+$ -関数 $f_h(x)$ と有限測度 ψ_h を

$$f_h(x) = \nu(\operatorname{Im} h | x) \quad x \in X$$

$$\psi_h(E) = \nu(hE), \quad E \subset \operatorname{Dom} h$$

で定める。

A) $\sum_{i=1}^n \oplus \mathcal{S}^i$ を定数 P -マコ-ビアンをもつ多重グラフと
する。各グラフ \mathcal{S}^i の 1 階のノードの名前を $\mathcal{C}_{\alpha(i)}$ とする。
次の工夫で

$$P = \mathcal{V} \quad , \quad \mathcal{C}_{\alpha(i)} \text{ 上}, \quad 1 \leq i \leq n$$

と仮定してよいことが分かる。次の性質を示そう。

$\forall \varepsilon > 0$ に対して、次をみたす有限個の $\mathcal{N}(i, j) \in \mathcal{P}$,
 $h_j^i \in [\mathcal{Q}]_{*}^{\mathcal{V}}$, $h_i \in [\mathcal{Q}]_{*}^{\mathcal{V}}$, $1 \leq j \leq N_i$, が存在する:

$$(*) \left\{ \begin{array}{ll} (1) & \| \psi_{h_i}(\cdot) - \mathcal{V}(\mathcal{C}_{\alpha(i)} \cap \cdot) \| < \varepsilon \\ (2) & \text{Dom } h_i = \mathcal{C}_{\alpha(i)} = \bigcup_{j=1}^{N_i} \text{Dom } h_j^i \quad (\text{排反和}) \\ (3) & f_{h_j^i}(x) = f_{T_{\mathcal{N}(i,j)}^{-1} - \mathcal{N}(i,1)} \circ h_1^i(x) \\ (4) & \psi_{h_i} = \sum_{j=1}^{N_i} \psi_{h_j^i} \end{array} \right. \quad 1 \leq i \leq n.$$

命題 2 $h \in [\mathcal{Q}]_{*}^{\mathcal{V}}$, $f \in L^1(X, \mu)_+$, $\varepsilon > 0$, 12251
 $\exists h_1 \in [\mathcal{Q}]_{*}^{\mathcal{V}}$ s.t.

$$(i) \quad \text{Dom } h_1 = \text{Dom } h$$

$$(ii) \quad \| \psi_h - \psi_{h_1} \| \leq \| f - f_{h_1} \| + \varepsilon$$

$$(iii) \quad f_{h_1} = f.$$

命題3 f_h ($h \in [\mathcal{G}]_x^\vee$) に対して

$$f_h = \sum_{i=1}^n f_i, \quad f_i \in L^1(X, \mu)_+$$

と書けていゝとある。あると、 $\exists h_i \in [\mathcal{G}]_x^\vee$ s.t.

$$(i) \quad \text{Dom } h = \bigcup_{i=1}^n \text{Dom } h_i \quad (\text{排反和})$$

$$(ii) \quad \psi_h = \sum_{i=1}^n \psi_{h_i}$$

$$(iii) \quad f_i = f_{h_i}.$$

(*) の証明には性質 AT を次のように使うとよい。即ち $\varepsilon > 0$ と各 $f_{e_{\alpha(i)}}(x)$, $1 \leq i \leq n$, に対して $f \in L^1(X, \mu)_+$ と有限個の $r(i, j) \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq N_i$, が存在し

$$\left\| f_{e_{\alpha(i)}}(x) - \sum_{j=1}^{N_i} e^{-r(i, j)} f(F_{r(i, j)} x) \frac{d\mu_{F_{r(i, j)}}}{d\mu}(x) \right\| < \varepsilon$$

($i=1, 2, \dots, n$).

を満たす。

次いで、 $\text{id}|_{e_{\alpha(i)}} \in [\mathcal{G}]_x^\vee$ と $\sum_{j=1}^{N_i} e^{-r(i, j)} x$

$f(F_{r(i, j)} x) \frac{d\mu_{F_{r(i, j)}}}{d\mu}(x) \in L^1(X, \mu)_+$ に命題2を適用

(2. $\exists h_i \in [\mathcal{G}]_x^\vee$ s.t.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dom } h_i = e_{\alpha(i)} \\ \|\psi_{h_i}(\cdot) - \nu(e_{\alpha(i)} \cap \cdot)\| \leq \|f_{h_i} - f_{e_{\alpha(i)}}\| + \varepsilon \\ f_{h_i}(x) = \sum_{j=1}^{N_i} e^{-r(i,j)} f(F_{r(i,j)} x) \frac{d\mu_{F_{r(i,j)}}}{d\mu}(x) \end{array} \right.$$

を得る。従って、

$$\|\psi_{h_i}(\cdot) - \nu(e_{\alpha(i)} \cap \cdot)\| < 2\varepsilon$$

$i=1, \dots, n.$

を得る。上から3行目の式に命題3を適用すると、

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{\alpha(i)} = \text{Dom } h_i = \bigcup_{j=1}^{N_i} \text{Dom } h_j^i \quad (\text{排反和}) \\ \psi_{h_i} = \sum_{j=1}^{N_i} \psi_{h_j^i} \\ e^{-r(i,j)} f(F_{r(i,j)} x) \frac{d\mu_{F_{r(i,j)}}}{d\mu}(x) = f_{h_j^i}(x) \end{array} \right.$$

を満たす $h_j^i \in [\mathcal{H}]_x^\nu$ が得られる。

命題 4

$$f_{T_r^{-1} \circ h}(x) = e^{-r} f_h(F_r x) \frac{d\mu_{F_r}}{d\mu}(x)$$

$h \in [\mathcal{H}]_x^\nu, r \in \Gamma$

この命題を上から9行目の式に適用すれば、

$$f_{h_j^i}(x) = f_{T_{r(i,j)}^{-1} \circ h_i}(x)$$

が得られる。以上で性質(*) が成り立つのが確かめられた。

命題 5 $h, h' \in [\sigma]_*^\nu$ に対して次は同値。

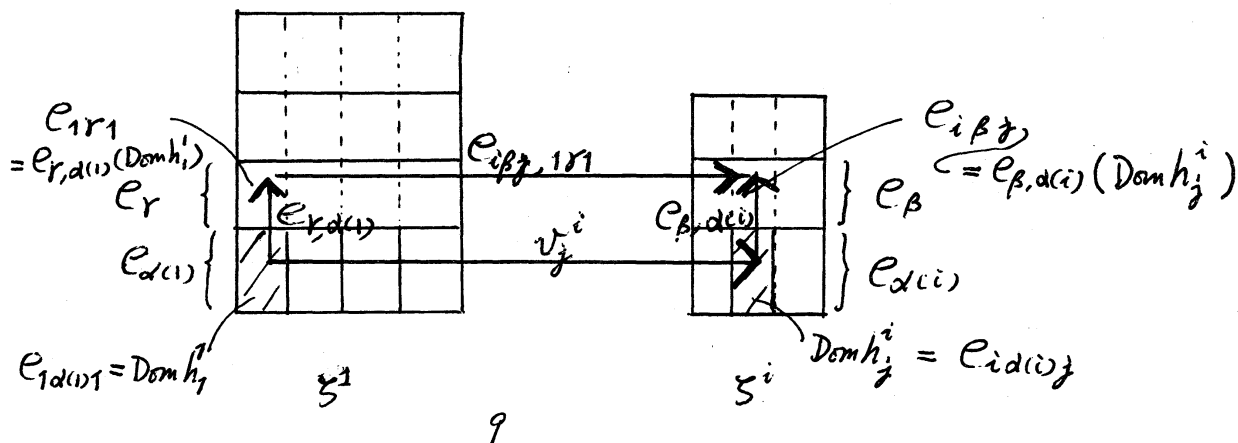
$$(a) \quad f_h = f_{h'}$$

$$(b) \quad \exists v \in [\sigma]_*^\nu \text{ s.t. } \begin{cases} \text{Dom } v = \text{Dom } h' \\ \text{Im } v = \text{Dom } h \\ \psi_h(v \cdot) = \psi_{h'}(\cdot) \end{cases}$$

さて命題 5 と性質(*) の (3) に適用する: i により,

$$\begin{aligned} v(h_j^i \circ v_j^i \cdot) &= \psi_{h_j^i}(v_j^i \cdot) = \psi_{T(r(i,j)-r(1,1))}^{-1} h_1^i(\cdot) \\ &= e^{-r(i,j)+r(1,1)} v(h_1^i \cdot) \end{aligned}$$

を満たす $v_j^i \in [\sigma]_*^\nu$ が得られる。そこで各 $\gamma - \zeta^{(i)}$ の 1 部分 α に対して $e_{\alpha(i)}$ を $\text{Dom } h_j^i$, $1 \leq j \leq N_i$, で分割し次の可換図を満たすように $e_{i\beta j, 1r1} \in [\sigma]_*^\nu$ 等を定める:



最後に測度 Q を

$$Q(e_{\beta, \alpha(i)} E) = \frac{P(e_{\beta})}{P(e_{\alpha(i)})} \nu(h_j^i E)$$

$$E \subset \text{Dom } h_j^i$$

と定めると、77-5

$$\xi = \{e_{i\alpha_j} ; 1 \leq i \leq n, \alpha \in \Lambda_i, 1 \leq j \leq N_i\}$$

は、多重タワ- $\sum_{i=1}^n \oplus \xi^i$ を細分し、定数 Q -マコ-ルア2 を得
5、

$$\|Q(e_{\alpha(i)} \cap \cdot) - P(e_{\alpha(i)} \cap \cdot)\|$$

$$= \left\| \sum_{j=1}^{N_i} \psi_{h_j^i}(\cdot) - \nu(e_{\alpha(i)} \cap \cdot) \right\|$$

$$= \left\| \psi_{h^i}(\cdot) - \nu(e_{\alpha(i)} \cap \cdot) \right\| < 2\varepsilon$$

$i=1, 2, \dots, n$

を満たしている。こうして η が命題1の条件を満たすことが分かった。□

詳しい証明は [3] [5] にある。

文献

[1] Anaki, H. and Woods, J., Classification of factors, Publ.
RIMS, Kyoto Univ. 4 (1968), 51-130

[2] Connes, A. and Woods, J., Approximately transitive flows
and ITPFI factors, Ergod. Th. and Dynam. Sys., 5
(1985), 203-236

- [3] Hamachi, T., A measure theoretical proof of Connes Woods theorem on AT-flows (preprint)
- [4] Hawkins, J., Properties of ergodic flows associated with product odometers, Pacific J. Math., 141 (1990), 287-294
- [5] 伊藤雄二, 濱地敏弘, エルゴード変換とファンクショナル環論, (1991) 紀伊国屋書店
- [6] Krieger, W., On ergodic flows and isomorphism of factors, Math. Ann., 223 (1976), 19-70